



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**  
**PROGRAMA DE POSGRADO EN  
FILOSOFÍA DE LA CIENCIA**



<b>Actividad Académica:</b> Seminario (Título: “El Teorema de Gödel. Aspectos Matemáticos, Históricos y Filosóficos”)				
<b>Clave:</b>	<b>Semestre:</b> 2019-1	<b>Campo de conocimiento:</b> Filosofía de las Matemáticas y Lógica de la Ciencia		
<b>Carácter:</b> Obligatoria ( ) Optativa ( ) de Elección ( )		<b>Horas por semana</b>		<b>Horas al semestre</b>
<b>Tipo:</b>		<b>Teóricas:</b>	<b>Prácticas:</b>	<b>No. Créditos</b>
		4	6	
<b>Modalidad:</b> Presencial		<b>Duración del programa:</b> 1 semestre		

**Seriación:** Si ( ) No ( x )      **Obligatoria** ( x )      **Indicativa** ( )

**Introducción:** Este seminario ofrecerá, fundamentalmente, una introducción matemática elemental a los teoremas de incompleción de Gödel y a otros teoremas relacionados con ellos; los resultados matemáticos presentados se expondrán llamando la atención sobre varias conexiones históricas entre ellos que resultan de interés; al final del curso se comentará un grupo selecto de problemas filosóficos suscitados por los teoremas de incompleción.

**Objetivo general:** Introducción matemática elemental a los teoremas de incompleción de Gödel y a otros teoremas relacionados con ellos.

**Objetivos específicos:** Los objetivos principales son (1) que el estudiante adquiera completa familiaridad con las nociones matemáticas que aparecen en las versiones presentadas de los teoremas de incompleción (satisfacción, verdad, demostrabilidad, consistencia, consistencia- $\omega$ , etc.), (2) que sea capaz de probar con facilidad resultados elementales acerca de esas nociones, y (3) que adquiera una comprensión buena de la estructura y contenido de las pruebas de los teoremas de incompleción. En el caso de los textos filosóficos que serán objeto de estudio, la idea rectora es que el estudiante los lea con plena comprensión de las motivaciones, los presupuestos, el contenido y las implicaciones básicas de cada texto particular.

Contenido Temático			
Unidad	Temas	Horas	
		Teóric as	Prácti cas
1			
2			
3			
4			
<b>Total de horas:</b>			
<b>Suma total de horas:</b>			

Consultar la siguiente tabla. Cada tema-clase corresponde a cuatro horas teóricas:

1ª clase	Introducción general. Lenguajes para la aritmética elemental, en particular $L_E$ . Sistemas formales.
2ª clase	Numeraciones de Gödel. La sintaxis precisa de $L_E$ . Una numeración de Gödel.
3ª clase	La inexpresabilidad de la satisfacción. Condiciones para la inexpresabilidad de la verdad. Condiciones para la incompleción.
4ª clase	Un método para construir oraciones indecidibles. Condiciones para la existencia de puntos fijos para la verdad.
5ª clase.	Relaciones $\Sigma_0$ , $\Sigma_1$ , $\Pi_1$ y $\Sigma$ . Su relación con la noción de computabilidad. La inexpresabilidad de la verdad y la existencia de puntos fijos para la verdad.
6ª clase.	Toda relación $\Sigma$ es $\Sigma_1$ . La Aritmética de Peano con Exponenciación (PE).
7ª clase.	La expresabilidad de la concatenación y de la función $r$ . Aritmetización de las secuencias finitas de expresiones.
8ª clase.	La expresabilidad de la demostrabilidad. La incompleción de PE.
9ª clase.	Construcción de oraciones indecidibles en PE. PE es completo- $\Sigma_0$ .
10ª clase.	La versión original del primer teorema de incompleción de Gödel.
11ª clase.	El perfeccionamiento de Rosser.
12ª clase.	El segundo teorema de incompleción de Gödel. Su relación con el Programa de Hilbert.
13ª clase.	El programa de Hilbert y su relación con los teoremas de incompleción.

- 14ª clase. Los teoremas de incompleción y la controversia sobre mentes y máquinas.  
(1)
- 15ª clase Los teoremas de incompleción y la controversia sobre mentes y máquinas.  
(2)
- 16ª clase Cabos sueltos.

### Bibliografía y actividades:

**Nota:** (en caso que exista alguna)

*Referencias para la parte matemática.*

Boolos, G., *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Boolos, G. y R. Jeffrey, *Computability and Logic*, 2ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Smith, P., *An Introduction to Gödel's Theorems*, 2a ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

Smullyan, R., *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

*Lecturas para la parte filosófica.*

Gödel, K., "Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and their implications" (1951), en Gödel, *Collected Works*, vol. III, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

Hilbert, D., "On the Infinite" (1925), en P. Benacerraf y H. Putnam (comps.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, 2ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Koellner, P., "Gödel's Disjunction", en L. Horsten y P. Welch (comps.), *Gödel's Disjunction. The Scope and Limits of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, 2016.

Kreisel, G., "Hilbert's Programme" (1958), en P. Benacerraf y H. Putnam (comps.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, 2ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Lucas, J. R., "Minds, Machines and Gödel", *Philosophy*, vol. 36, 1961.

Penrose, R., "Gödel, the Mind, and the Laws of Physics", en M. Baaz, C. H. Papadimitriou, H. Putnam, D. S. Scott y C. L. Harper (comps.), *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics: Horizons of Truth*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

Putnam, H., "Minds and Machines" (1960), en Putnam, *Mind, Language and Reality. Philosophical Papers, Vol. 2.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

Smorynski, C., "The Incompleteness Theorems", en J. Barwise (comp.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

Von Neumann, J., "The Formalist Foundations of Mathematics" (1931), en P. Benacerraf y H. Putnam (comps.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, 2ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Williamson, T., “Absolute Provability and Safe Knowledge of Axioms”, en L. Horsten y P. Welch (comps.), *Gödel’s Disjunction. The Scope and Limits of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, 2016.

*Algunos textos históricos.*

Gödel, K., “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I” (1931), en Gödel, *Collected Works*, vol. I, Oxford University Press, Nueva York, 1986 (esta edición también contiene una traducción al inglés, traducción que asimismo aparece en J. Van Heijenoort (comp.), *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1967).

Löb, M. H., “Solution of a Problem of Leon Henkin”, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 20, 1955.

Rosser, J. B., “Extensions of some Theorems of Gödel and Church”, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, 1936.

Tarski, A., “The Concept of Truth in Formalized Languages” (1935), en Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1956.

<b>Medios didácticas:</b>	<b>Métodos de evaluación:</b>
Exposición profesor(a) ( x )	Exámenes o trabajos parciales ( x )
Exposición alumnos ( x )	Examen o trabajo final escrito ( )
Ejercicios dentro de clase ( )	Trabajos y tareas fuera del aula ( x )
Ejercicios fuera del aula ( x )	Exposición de alumnos ( )
Lecturas obligatorias ( x )	Participación en clase ( x )
Trabajo de investigación ( )	Asistencia ( x )
Prácticas de campo ( )	Prácticas ( )
Otros: _____ ( )	Otros: _____ ( )

### **Evaluación y forma de trabajo**

Las primeras doce clases constarán fundamentalmente de explicaciones de nociones matemáticas y demostraciones de teoremas y otros resultados. La estructura de la parte matemática del curso será muy parecida a la del libro de Smullyan, pero los detalles de la presentación del curso diferirán de los detalles de la presentación de Smullyan, y las explicaciones y demostraciones matemáticas de

clase no requerirán el estudio de ningún texto en particular, salvo los apuntes y los papeles volantes distribuidos en clase.

En las cuatro últimas clases se explicarán y discutirán, con la participación de los estudiantes, las lecturas filosóficas asignadas para esas clases.

Con una periodicidad aproximada de dos semanas, cada estudiante habrá de contestar a un cuestionario de ejercicios sobre las clases anteriores, con valor de 10 puntos. En general, los ejercicios consistirán en hacer demostraciones y computaciones elementales, o en responder de manera concisa a preguntas de naturaleza filosófica. La calificación final se basará en la media aritmética de las calificaciones de las respuestas a los cuestionarios.

**Imparte:** Mario Gómez Torrente

**Mail:** [mariogt@unam.mx](mailto:mariogt@unam.mx)

**Día y hora del curso o seminario (dos propuestas):** Jueves de 10h a 14h

**Lugar:** Instituto de Investigaciones Filosóficas